RİYAZİYYAT

УДК 517.98

ДВУХМЕРНЫЙ ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР ПАУЛИ. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СЛОЯМ

В.А.МЕХРАБОВ
Бакинский Государственный Университет
vugar-1969@rambler.ru

В этой работе рассматривается спектр двухмерного периодического оператора Паули. Известно, что оператор Паули один из важнейщих операторов квантовой физики. Он описывает движении частицы со спином в электромагнитном поле. Доказываеться что, спектр периодического оператора Паули есть объеденение спекторов регулярных операторов Паули порожденных в фундаментальном области некоторой решетки с квазипериодическими граничными условиями.

Ключевые слова: двухмерный периодический оператор Паули, собственные значения, спектр, расслоение по слоям

В этой статье рассматривается оператор Паули $H_t(a,V(x))$ порожденный в $L_2(F)\times L_2(F)$ выражением

$$H(a,V(x)) = ((-i\cdot grad - a)^2 + V(x))\cdot I + \sigma\cdot B \qquad (1)$$

и граничными условиями

$$u(x+\omega_j) = e^{2\pi i t_j}u(x), \qquad (2)$$

где $x\in R^2, B=[grad\times a]$ - магнитное поле порожденное вектор потенциалом $a=(a_1,a_2)$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

F - фундаментальная область некоторой решетки $\Omega=\{m_1\omega_1+m_2\omega_2 : m_1,m_2\in Z\}$- т. е. паралелограм, $t=t_1\gamma^1+t_2\gamma^2$ а γ^1,γ^2 биортогональная к ω_1,ω_2 векторы, F^*- фундаментальная область решетки $\Gamma = \{n_1\gamma^1 + n_2\gamma^2 : n_1, n_2 \in Z\}$, $V(x)$ - периодическая достаточно гладкая функция.

Докажем, что спектр оператора $H(a,V(x))$, порожденного $L_2(R^2) \times L_2(R^2)$ выражением (1), есть объединение спекторов $H_t(a,V(x))$.

Сначала дадим несколько определений из [1].

Определение. Пусть R связная область в комплексной плоскости и пусть для каждого $\beta \in R$ задан $T(\beta)$ - замкнутый оператор с непустым резольвентным множеством. Будем говорить, что $T(\beta)$ - аналитическое семейство типа (A), тогда и только тогда, когда:

1) Операторная область определения $T(\beta)$ есть некоторое множество D, независимое от β;

2) $T(\beta)\Psi$ - есть векторнозначная аналитическая функция β для всякого $\Psi \in D$.

Определение. Операторнозначная функция (возможно, неограниченная) $T(\beta)$ в комплексной области R называется аналитическим семейством или аналитическим семейством в смысле Като тогда и только тогда, когда:

1) при всяком $\beta \in R$ оператор $T(\beta)$ замкнут и его резольвентное множество непусто;

2) при всяком $\beta_0 \in R$ существует некоторое $\lambda_0 \in \rho(T(\beta_0))$ такое, что $\lambda_0 \in \rho(T(\beta))$ при β, близких к β_0, и $(T(\beta) - \lambda_0)^{-1}$ есть аналитическая операторнозначная функция β вблизи β_0.

Разумеется, что каждое семейство типа (A) есть аналитическое семейство в смысле Като.

Итак, пусть H' - сепарабельное гилбертово пространство и $< \mathrm{M}, \mu >$ - пространство с σ-конечной мерой, а $L^2(\mathrm{M}, d\mu; \mathrm{H}')$ - гилбертово пространство квадратично интегрируемых H'-значных функций. Заметим, что если μ-сумма точечных мер, сосредоточенных в точках $m_1, m_2, ..., m_n$, то любая $f \in L^2(\mathrm{M}, d\mu; \mathrm{H}')$ определена набором $< f(m_1), f(m_2), ..., f(m_n) >$, так что $L^2(\mathrm{M}, d\mu; \mathrm{H}')$ изоморфно прямой сумме $\bigoplus\limits_{i=1}^{n}(\mathrm{H}'_i) = \mathrm{H}'$. Тогда $L^2(\mathrm{M}, d\mu; \mathrm{H}')$ для более общих мер μ есть своего рода “непрерывная прамая сумма”, но с одинаковыми слагаемыми. По этой причине назовем $\mathrm{H} \equiv L^2(\mathrm{M}, d\mu; \mathrm{H}')$ прямым интегралом пространств с одинаковыми слоями и будем писать $\mathrm{H} = \int_M^{\oplus} \mathrm{H}' d\mu$.

Это сделано с целью перенести акцент с точек пространства M на “слой” H'. Нас будет интересовать специальный класс операторов на H. Функция $A(.)$ из M в $\Im(\mathrm{H}')$ называется измеримой тогда и только тогда, когда измерима функция $(\varphi, A(.)\phi)$ для любых $\varphi, \phi \in \mathrm{H}'$. Символ $L^{\infty}(\mathrm{M}, d\mu; \Im(\mathrm{H}'))$ обозначает пространство (класс эквивалентности равных п.в.) измеримых функций из M в $\Im(\mathrm{H}')$, таких, что

$$\|A\|_{\infty} = ess\sup\|A(m)\|_{\Im(\mathrm{H}')} < \infty .$$

Определение. Говорят, что ограниченный оператор A на $\mathrm{H} = \int_M^{\oplus} \mathrm{H}' d\mu$ разложен прямым интегралом пространств, тогда и только тогда, когда существует функция $A(.) \in L^{\infty}(\mathrm{M}, d\mu; \Im(\mathrm{H}'))$ такая, что для всех $\phi \in \mathrm{H}$

$$(A\phi)(m) = A(m)\phi(m). \tag{3}$$

В таком случае мы называем A разложимым и пишем $A = \int_M^{\oplus} A(m) d\mu(m),$

причем $A(m)$ называется слоями оператора A.

Отметим прежде всего, что с каждой функцией $A(.)$ из $L^{\infty}(\mathrm{M}, d\mu; \Im(\mathrm{H}'))$ связан некоторый разложимый оператор.

Теорема. Если $A(.) \in L^{\infty}(\mathrm{M}, d\mu; \Im(\mathrm{H}'))$, то существует однозначно определенный разложимый оператор $A \in \Im(\mathrm{H})$ такой, что выполняется (3). Более того,

$$\|A(m)\|_{\Im(\mathrm{H}')} = \|A\|_{\infty}. \tag{4}$$

Эта теорема устанавливает изометрический изоморфизм между $L^{\infty}(\mathrm{M}, d\mu; \Im(\mathrm{H}'))$ и множеством разложимых операторов на $\int_M^{\oplus} \mathrm{H}' d\mu$. Оба эти пространства суть алгебры и легко понять, что при описанном изоморфизме сохраняются и алгебраические структуры. $L^{\infty}(\mathrm{M}, d\mu; C)$ - естественная подалгебра в $L^{\infty}(\mathrm{M}, d\mu; \Im(\mathrm{H}'))$, отвечаюшая тем разложимым операторам, у которых все слои кратны единичному оператору.

Теорема. Пусть $\mathrm{H} = \int_M^{\oplus} \mathrm{H}' d\mu$, где $< \mathrm{M}, \mu >$ - сепарабельное пространство с σ-конечной мерой и H' сепарабельно. Пусть $\aleph$ - алгебра разложимых операторов со слоями, кратными единичному оператору. В таком случае $A \in \Im(\mathrm{H})$ разложим, тогда и только тогда, когда A коммутирует с каждым оператором из $\aleph$.

Применяемая нами ниже конструкция существенно опирается на то, что $U(t)$ порождает алгебру, изоморфную алгебре $\aleph$, отвечающей подходящему разложению $\mathrm{H} = L^2(R^2, dx)$ в прямой интеграл с одинаковыми слоями.

Определение. Функция $A(.)$ из пространства с мерой $< \mathrm{M}, \mu >$ во множестве самосопряженных (не обязательно ограниченных) операторов на гилбертовом пространстве H' называется измеримой, тогда и только тогда, когда измерима функция $(A(.) + i)^{-1}$.

Зная такую функцию, мы определяем оператор A в $\mathrm{H} = \int_M^{\oplus} \mathrm{H}' d\mu$ с областью определения

$$D(A) = \left\{ \varphi \in \mathrm{H} \ \left| \phi(m) \in D(A(m)) п..в., \int_M \left\| A(m)\phi(m) \right\|_{\mathrm{H}'}^2 d\mu(m) < \infty \right. \right\}, \qquad (5)$$

соотношением $(A\phi)(m) = A(m)\phi(m)$ и пишем

$$A = \int_M^{\oplus} A(m) d\mu(m). \qquad (6)$$

Для таких операторов доказывается следующая

Теорема 1. Пусть $A = \int_M^{\oplus} A(m) d\mu(m)$, где $A(.)$ измерима и $A(m)$ самосопряженный оператор для каждого m. Тогда $\lambda \in \sigma(A)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{ m \in M \ | \sigma(A(m)) \cap (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \neq \emptyset \}) > 0. \qquad (7)$$

Теперь эти результаты перенесем к оператору Паули с периодическим потенциалом $V(x)$, т.е. предполагается, что для некоторого базиса $\{\varpi_1\}, \{\varpi_2\} \in R^2$ потенциал $V(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$V(x + \varpi_i) = V(x), \quad i = 1,2. \qquad (8)$$

Итак, спектральные свойства оператора Паули весьма чуствительны к поведению $V(x)$ на бесконечности, а поскольку $V(x)$, удовлетворяющий (8), не имеет предела при $x \to \infty$ по любому направлению, то можно ожидать, что анализ периодических операторов Паули будет достаточно трудным.

Свойство, которое позволяет провести анализ оператора $\widetilde{H}(a, V(x))$ когда $V(x)$ периодическая функция, состоит в том, что он симметричен относительно действия обширной группы. На самом деле, полагая $(U(t)\phi)(x) = \phi(x + t_1 a_1 + t_2 a_2)$, где $t \in Z^2$ мы видим, что (формально)

$$U(t)\tilde{H}(a,V(x)) = \tilde{H}(a,V(x))U(t). \quad (9)$$

Для того чтобы использовать вышеприведенную теорию нужно, чтобы $u(x)$ была периодичной. Поэтому сделаем такую замену $u(x) = e^{i<t,x>}u_1(x)$.

Отсюда получаем, что

$$u_1(x) = e^{-i<t,x>}u(x). \quad (10)$$

А теперь используя формулы (2) и (10), получим

$$u_1(x+\varpi_i) = e^{-i<t,x>}u(x+\varpi_i) = e^{-i<t,x>}e^{-i<t,\varpi_i>}u(x+\varpi_i) =$$
$$= e^{-i<t,x>}e^{-2\pi i t_j}u(x) = e^{-i<t,x>}u(x) = u_1(x),\ j=1,2.$$

Это доказывает, что $u_1(x)$ периодична относительно $\{\varpi_1\},\{\varpi_2\}$.

Из (10) имеем:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = it_1e^{i<t,x>}u_1(x) + \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}e^{i<t,x>},$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = it_2e^{i<t,x>}u_1(x) + \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}e^{i<t,x>},$$

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1{}^2} = -t_1{}^2e^{i<t,x>}u_1(x) + 2it_ie^{i<t,x>}\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} + e^{i<t,x>}\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1{}^2},$$

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2{}^2} = -t_2{}^2e^{i<t,x>}u_1(x) + 2it_2e^{i<t,x>}\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} + e^{i<t,x>}\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2{}^2}.$$

Принимая это во внимание в формуле (1) получаем:

$$\tilde{H}(a,V(x))u_1(x) = -(t_1^2+t_2^2)u_1(x) + 2i(t_1\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} + t_2\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}) + \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2{}^2} +$$
$$+ (2ia_1 \pm a_2)(it_1u_1(x) + \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}) + (2ia_2 \mp a_1)(it_2u_1(x) + \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}) + a^2u_1(x) \quad (11)$$

Этот оператор обозначим через $\mathrm{H}(t)$, где $t=(t_1,t_2)$. Теперь докажем, что $\mathrm{H}(t)$ - аналитическое семейство типа (A).

1) Операторная область определения $\mathrm{H}(t)$ не зависит от t, потому что F независит от t.

2) Теперь докажем, что $\mathrm{H}(t)\phi$ есть векторнозначная аналитическая функция t для всякого $\phi \in L_2(F)\times L_2(F)$.

Из формулы (11) видно, что $\mathrm{H}(t)\phi$ есть аналитическая функция по t_1 когда t_2 фиксирован и наоборот.

Пусть ϖ_1,ϖ_2 - некоторый базис в R^2, а γ^1,γ^2 - биортогональный базис к ϖ_1,ϖ_2, т.е. $(\varpi_j,\gamma^i) = 2\pi\delta_{i,j}$. Пусть $V(x)$ -функция на R^2, такая, что

$V(x+\varpi_j)=V(x)$. Пусть $\mathrm{H}'=L_2(Z^2)\times L_2(Z^2)$, $\mathrm{H}=\int\limits_{F^*}^{\oplus}\mathrm{H}'d^2\kappa$ и V_γ - коэффициенты Фурье $V(x)$ как функции на F, т.е. для любого $m\in Z^2$

$$V_\gamma=\int\limits_F e^{-i<\gamma,x>}V(x)d^2x. \tag{12}$$

Для $\kappa\in F^*$ определим оператор $H(\kappa)$ на H'

$$(H(\kappa)g)_m=\begin{pmatrix}\left(\kappa+\sum\limits_{i=1}^{2}\gamma^i\right)^2 g_m+(2ia_1+a_2)\gamma^1 g_m+(2ia_2-a_1)\gamma^2 g_m+a^2g_m+\sum\limits_{i=1}^{2}V_\gamma g_{m-\gamma}\\ \left(\kappa+\sum\limits_{i=1}^{2}\gamma^i\right)^2 g_m+(2ia_1-a_2)\gamma^1 g_m+(2ia_2+a_1)\gamma^2 g_m+a^2g_m+\sum\limits_{i=1}^{2}V_\gamma g_{m-\gamma}\end{pmatrix}, \tag{13}$$

с областью определения $D_0=\left\{g\in\mathrm{H}':\sum m^2|g_m|^2<\infty\right\}$.

Наконец, пусть $U:L_2(R^2)\to\mathrm{H}$ задана соотношением

$$[(Uf)(\kappa)]_m=\hat f\left(\kappa+m_1\gamma^1+m_2\gamma^2\right)\cdot I,\qquad \text{где}\quad I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Докажем, что U - унитарный оператор и

$$U\cdot\begin{pmatrix}-\wedge+2i(\nabla,a)+a^2-[\nabla,a]+V(x) & 0\\ 0 & -\wedge+2i(\nabla,a)+a^2+[\nabla,a]+V(x)\end{pmatrix}\cdot U^{-1}=\int\limits_{F^*}^{\oplus}\mathrm{H}(\kappa)d^2\kappa \tag{14}$$

Унитарность U следует из теоремы Планшереля, более того, ясно, что

$$\left[\left(U\cdot(-\wedge)\cdot U^{-1}\right)g\right](\kappa)_m=\begin{pmatrix}(\kappa+m_1\gamma^1+m_2\gamma^2)^2g(\kappa)_m\\(\kappa+m_1\gamma^1+m_2\gamma^2)^2g(\kappa)_m\end{pmatrix}, \tag{15}$$

поскольку $-\hat{\wedge}f(l)=l^2\hat f(l)$. Учитывая это имеем:

$$\left[\left(U\cdot\left(2i(\nabla,a)+a^2\mp[\nabla,a]\right)\cdot U^{-1})g\right)\right](\kappa)_m=$$

$$=\begin{pmatrix}(2ia_1+a_2)\gamma^1g(\kappa)_m+(2ia_2-a_1)\gamma^2g(\kappa)_m+a^2g(\kappa)_m\\(2ia_1-a_2)\gamma^1g(\kappa)_m+(2ia_2+a_1)\gamma^2g(\kappa)_m+a^2g(\kappa)_m\end{pmatrix} \tag{16}$$

А теперь докажем, что

$$\left[\left(U\cdot V(x)U^{-1}g\right)\right](\kappa)_m=\begin{pmatrix}\sum\limits_{\gamma\in Z^2}V_\gamma g_{m-\gamma}(\kappa)\\ \sum\limits_{\gamma\in Z^2}V_\gamma g_{m-\gamma}(\kappa)\end{pmatrix} \tag{17}$$

А для этого достаточно показать, что для $f\in Z(R^2)$

$$\hat{Vf}(\kappa)=\sum_{\alpha\in Z^2}V_\gamma f(\kappa-\alpha_1\gamma^1-\alpha_2\gamma^2) \tag{18}$$

Для доказательства (18) нужно только убедиться, что обобщенная функция умеренного роста имеет Фурье образ.

$$\hat{V}(\kappa) = 2\pi \cdot \sum_{\alpha \in Z^2} V_\gamma \delta(\kappa - \alpha_1\gamma^1 - \alpha_2\gamma^2).$$

Но это верно, поскольку как и в одномерном случае, ряд Фурье

$$V(x) = \sum_{\alpha \in Z^2} V_\gamma e^{i<\alpha\gamma, x>}$$

сходится локально в смысле L_2, ибо $V(x)$ равномерно локально принадлежит L_2.

Из (15), (16), (17) следует, что (14) верно. А еще мы знаем, что

$$L_2(R^2) \times L_2(R^2) = \int_\Omega^\oplus L_2(F) \times L_2(F). \tag{19}$$

Из (14) и (19) следует, что верна Теорема 1, т.е. $\lambda \in \sigma(H(t))$, тогда и только тогда, когда для любого

$$\mu(\{t \in F \;|\sigma(H(t)) \cap (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \neq \emptyset\}) > 0. \tag{20}$$

А теперь используя аналитичность типа (А) оператора $H(t) = H(a, V(x))$ докажем, что из (20) следует

Теорема 2.

$$\sigma(H(a,V(x))) = \bigcup_{t \in F} \sigma(H_t(a,V(x))) \tag{21}$$

Доказательство. а) Сперва допустим, что $\lambda \in \bigcup_{t\in F} \sigma(H_t(a,V(x)))$. Отсюда получаем, что есть такая t_0, что $\lambda \in \sigma(H_{t_0}(a,V(x)))$.

Теперь допустим, что $\lambda = \lambda_n(t_0)$. Очевидно, что $\lambda_n(t_0)$ не постоянная. В работе [1] доказано, что $\left|\frac{\partial \lambda_n(t)}{\partial t}\right| < c(|\lambda_n(t)| + |t| + 1)$.

Примем обозначение $M \equiv |\lambda_n(t)| + |t| + 1$. Тогда при $\tau \in [-\delta, \delta]$, где $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$, имеет место $\lambda(t_0 + \tau)\tau \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$, т.е.

$$\mu(\{t \in F \;|\sigma(H_t) \cap (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \neq \emptyset\}) > 2\delta > 0.$$

А отсюда в силу Теоремы 1 следует, что $\lambda \in \sigma(H(a,V(x)))$.

б) Допустим, что $\lambda \in \sigma(H(a,V(x)))$. Тогда из Теоремы 1 получаем, что $\forall \varepsilon_\kappa > 0 (\lim_{\kappa\to\infty} \varepsilon_\kappa = 0), \mu(\{t \in F \;|\sigma(H_t) \cap (\lambda - \varepsilon_\kappa, \lambda + \varepsilon_\kappa) \neq \emptyset\}) > 0$, т.е. существуют такие t_κ и N_κ, что

$$\lambda_{N_\kappa}(t_\kappa) \in \sigma(H_{t_0}(a,V(x))) \Rightarrow \lambda_{N_\kappa}(t_\kappa) \in (\lambda - \varepsilon_\kappa, \lambda + \varepsilon_\kappa).$$

Поскольку этих индексов N_κ не больше чем конечное число, то существует такой номер N, что ему соответствует бесконечное $\{\, t_{n_\kappa} \,\}$ из $\{\, t_\kappa \,\}$, т.е. $\lambda_N(t_{n_\kappa}) \in (\lambda - \varepsilon_\kappa, \lambda + \varepsilon_\kappa)$.

Можно выбрать из $\{\, t_{n_\kappa} \,\}$ такую подпоследовательность, что она сходится к t_0 (её снова обозначим через t_{n_κ}, т.е. $\lim\limits_{\kappa\to\infty} t_{n_\kappa} = t_0$). Тогда по непрерывности $\lambda_N(t)$ получаем, что

$\lim\limits_{\kappa\to\infty} \lambda_N(t_{n_\kappa}) = \lambda_N(t_0)$, т.е. $\lambda_0 \in \sigma(H_{t_0}(a, V(x))) \Rightarrow \lambda_0 \in \bigcup\limits_{t\in F} \sigma(H_t(a, V(x)))$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: Анализ операторов. М.: Мир, 1982, том 4, 428 с.
2. Велиев О.А. Асимптотические формулы для собственных чисел многомерного оператора Шредингера и периодические дифференциальные операторы. Препринт ИФ АР Азерб.ССР, № 157, Баку, 1985, 65 с.
3. Мехрабов В.А. Периодический оператор Паули. Асимптотические формулы высокого порядка. Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики», г. Тула, 19-23 ноября 2007 г., с. 61-63.
4. Мехрабов В.А. Асимптотические формулы для некоторой серии нерезонансных собственных значений трехмерного периодического оператора Паули. Вестник Бакинского Государственного Университета 2012, №-1, с.38-48.

İKİÖLÇÜLÜ PERİODİK PAULİ OPERATORU. LAYLARA AYRILMA

V.A.MEHRABOV

XÜLASƏ

Məqalədə paraleloqramda ikiölçülü periodik Pauli operatorunun spektri araşdırılmışdır. Məlumdur ki, kvant fizikasında geniş tətbiq olunan Pauli operatoru spinli zərrəciyin maqnit sahəsində hərəkətini xarakterizə edir. Bu operatorun məxsusi ədədləri verilmiş halda kvant sisteminin (maqnit sahəsində hərəkət edən spinli elektronun) tam enerjisinə uyğundur. İsbat olunmuşdur ki, periodik Pauli operatorunun spektri şəbəkənin fundamental oblastında kvaziperiodik sərhəd şərtləri ilə təyin olunmuş requlyar Pauli operatorlarının spekrlərinin birləşməsinə bərabərdir.

Açar sözlər: İkiölçülü periodik Pauli operatoru, məxsusi ədədlər, spektr, laylara ayrılma

**TWO-DIMENSIONAL PERIODIC PAULY OPERATOR.
EXPANSION INTO THE LAYER**

V.A.MEHRABOV

SUMMARY

The article investigates the spectrum of a two-dimensional periodic Pauly operator in parallelogram. As it is known, the Pauly's operator is one of the important operators of the Quantum Physics and describes the movement of the particle with spin in magnetic field. The eigenvalues of this operator correspond to the full energy of the particle with spin in the given state.

It is proved, that the sprectrum of the periodic Pauly's operator is the union of the sprectrums of regular Pauly's operators, generated in fundamental domain of some lattice with quasi-periodic boundary conditions.

Key words: Periodic Pauly's operator, eigenvalues, sprectrum, expansion into the layer

Поступила в редакцию: 15.09.2014 г.
Подписано к печати: 26.11.2014 г.